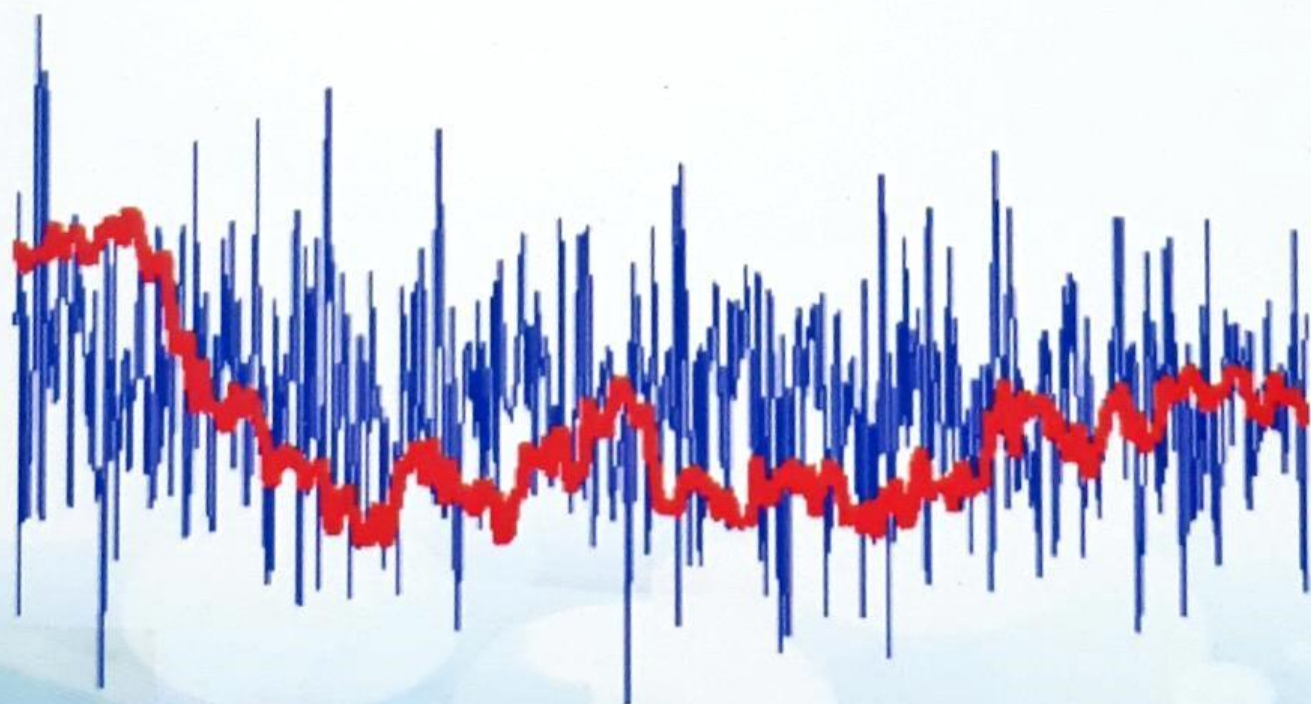




TRƯỜNG ĐẠI HỌC CÔNG NGHIỆP HÀ NỘI

# GIÁO TRÌNH

## **XÁC SUẤT VÀ QUÁ TRÌNH NGẪU NHIÊN**



NHÀ XUẤT BẢN THỐNG KÊ

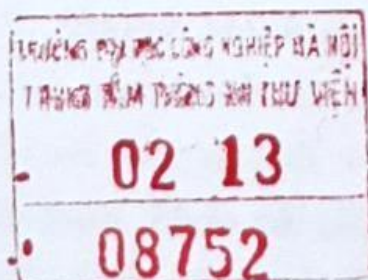


TRƯỜNG ĐẠI HỌC CÔNG NGHIỆP HÀ NỘI

Hoàng Mạnh Kha (Chủ biên)  
Vũ Trung Kiên - Trần Đình Thông

# GIÁO TRÌNH

## XÁC SUẤT VÀ QUÁ TRÌNH NGẪU NHIÊN



NHÀ XUẤT BẢN THỐNG KÊ - 2020



## LỜI NÓI ĐẦU

Các tín hiệu và quá trình vật lý của các hệ thống đều có những đặc tính ngẫu nhiên nhất định do bản thân tín hiệu đó, hoặc do can nhiễu từ nguồn bên ngoài. Để có thể giải quyết được các vấn đề đó, các kỹ sư, chuyên gia cần phải có một kiến thức nhất định về xác suất và các quá trình ngẫu nhiên.

Với mục tiêu đưa kiến thức về xác suất và các quá trình ngẫu nhiên gần hơn với ứng dụng thực tế, tập thể tác giả biên soạn giáo trình **“Xác suất và quá trình ngẫu nhiên”** dành cho các thạc sĩ, kỹ sư công nghệ. Nội dung của giáo trình được sử dụng để giảng dạy đại học, sau đại học cho các chuyên ngành về điện, điện tử, truyền thông, điều khiển tự động, kỹ thuật robot,...

Giáo trình bao gồm 6 chương: chương 1 và chương 2 trình bày các khái niệm cơ bản về xác suất, biến ngẫu nhiên và các hàm phân bố, hàm mật độ của biến ngẫu nhiên. Chương 3 trình bày chi tiết nội dung về các hàm của biến ngẫu nhiên cũng như các tham số của hàm. Nội dung từ chương 1 đến chương 3 do TS. Hoàng Mạnh Kha biên soạn. Quá trình ngẫu nhiên và các đặc tính của quá trình này được trình bày chi tiết trong chương 4 do TS. Hoàng Mạnh Kha và ThS. Vũ Trung Kiên biên soạn. Chương 5 trình bày về các tính toán, khảo sát đáp ứng của một hệ thống tuyến tính với đầu vào là tín hiệu ngẫu nhiên do TS. Hoàng Mạnh Kha và ThS. Trần Đình Thông biên soạn. Chương 6 do TS. Hoàng Mạnh Kha biên soạn, trình bày nội dung về một số thuật toán ước lượng tham số của phân bố xác suất, trong đó thuật toán cực đại hóa kỳ vọng là nội dung chính.

Tập thể tác giả cũng cố gắng trình bày các ví dụ một cách trực quan, dễ hiểu nhất đối với người đọc. Đa số các ví dụ đều gắn với một hệ thống gần với thực tiễn để người đọc có thể dễ dàng nắm bắt được cách thức vận dụng kiến thức lý thuyết xác suất vào thực tiễn, đặc biệt là vào lĩnh vực điện tử viễn thông.



Tập thể tác giả xin chân thành cảm ơn ý kiến góp ý của các cán bộ giảng viên trong Khoa Điện tử để hoàn thiện các nội dung giáo trình. Trong quá trình biên soạn, mặc dù đã rất cố gắng nhưng giáo trình khó tránh khỏi những thiếu sót, tập thể tác giả rất mong nhận được ý kiến phản hồi, góp ý từ người đọc để tiếp tục hoàn thiện giáo trình ở những lần tái bản tiếp theo.

Ý kiến góp ý xin gửi về:

- Địa chỉ: Khoa Điện tử, Trường Đại học Công nghiệp Hà Nội, 298 đường Cầu Diễn, phường Minh Khai, quận Nam Từ Liêm, Hà Nội.

- Email: [khahoang@hau.edu.vn](mailto:khahoang@hau.edu.vn)

- Điện thoại: (0243) 7655121 - 264.

TẬP THỂ TÁC GIẢ



# MỤC LỤC

<b>Chương 1. GIỚI THIỆU .....</b>	<b>9</b>
1.1. Khái niệm về xác suất.....	9
1.2. Một số định nghĩa trong xác suất.....	10
1.3. Phép thử lặp và định lý Bernoulli .....	13
1.3.1. Phép thử lặp.....	13
1.3.2. Định lý Bernoulli (Phép thử Bernoulli).....	13
1.4. Xác suất có điều kiện và xác suất kết hợp.....	18
Tổng kết chương.....	20
Bài tập chương 1.....	21
<b>Chương 2. BIẾN NGẪU NHIÊN .....</b>	<b>23</b>
2.1. Giới thiệu.....	23
2.2. Hàm phân bố và hàm mật độ .....	24
2.2.1. Hàm phân bố xác suất .....	24
2.2.2. Hàm mật độ xác suất (probability density function).....	28
2.3. Các biến ngẫu nhiên đặc biệt.....	29
2.4. Phân bố có điều kiện.....	36
Tổng kết chương.....	39
Bài tập chương 2.....	39
<b>Chương 3. HÀM CỦA BIẾN NGẪU NHIÊN .....</b>	<b>41</b>
3.1. Biến ngẫu nhiên $g(X)$ .....	41
3.2. Phân bố của $g(X)$ .....	42
3.3. Trung bình và phương sai.....	46



3.4. Mô-men.....	40
3.5. Phân bố hai biến .....	50
3.6. Hàm của hai biến ngẫu nhiên .....	53
3.7. Mô-men kết hợp .....	55
3.8. Các hàm đặc tính kết hợp .....	57
3.9. Phân bố có điều kiện.....	58
3.10. Kỳ vọng có điều kiện.....	62
Tổng kết chương.....	63
Bài tập chương 3.....	63
<b>Chương 4. TÍN HIỆU NGẪU NHIÊN VÀ CÁC QUÁ TRÌNH NGẪU NHIÊN .....</b>	<b>67</b>
4.1. Tín hiệu ngẫu nhiên và các mô tả toán học của tín hiệu ngẫu nhiên .....	67
4.2. Khái niệm về quá trình ngẫu nhiên.....	68
4.3. Tính dừng, ergodic và phân loại các quá trình ngẫu nhiên.....	70
4.3.1. Tính dừng .....	70
4.3.2. Tính ergodic .....	70
4.3.3. Phân loại quá trình ngẫu nhiên.....	72
4.4. Mô tả xác suất của một quá trình ngẫu nhiên.....	72
4.4.1. Hàm kỳ vọng .....	72
4.4.2. Hàm tự tương quan.....	73
4.4.3. Hàm tương quan chéo .....	75
4.5. Hàm mật độ phổ công suất .....	76
4.5.1. Vấn đề nghiên cứu QTNN trong miền tần số.....	77
4.5.2. Mật độ phổ công suất .....	78
4.5.3. Mật độ phổ công suất chéo.....	79
4.5.4. Mật độ phổ công suất cho dãy ngẫu nhiên.....	80



4.6. Nhiễu trắng .....	80
4.7. Quá trình ngẫu nhiên Gauss.....	83
4.8. Quá trình Gauss băng hẹp.....	86
4.9. Chuỗi Markov và quá trình Markov .....	88
4.9.1. Chuỗi Markov .....	88
4.9.2. Quá trình Markov .....	90
4.10. Tín hiệu giả ngẫu nhiên .....	90
4.11. Xác định tự tương quan và mật độ phổ từ dữ liệu thực nghiệm .....	92
Tổng kết chương .....	95
Bài tập chương 4.....	95
<b>Chương 5. ĐÁP ỨNG CỦA HỆ THỐNG TUYẾN TÍNH     ĐỐI VỚI CÁC ĐẦU VÀO NGẪU NHIÊN .....</b>	<b>99</b>
5.1. Giới thiệu .....	99
5.1.1. Hệ thống tuyến tính tổng quát.....	100
5.1.2. Hệ tuyến tính bất biến theo thời gian .....	101
5.2. Hệ tuyến tính với đầu vào ngẫu nhiên .....	103
5.3. Phân tích dừng (trạng thái xác lập).....	103
5.4. Nhiễu trắng lý tưởng và các hệ thống có băng thông giới hạn...	106
5.5. Phân tích quá độ .....	107
5.5.1. Đáp ứng với điều kiện khởi tạo .....	107
5.5.2. Đáp ứng với điều kiện cưỡng bức .....	109
5.6. Phân tích các quá trình rời rạc về thời gian .....	113
Tổng kết chương .....	116
Bài tập chương 5 .....	116



<b>Chương 6. ƯỚC LƯỢNG THAM SỐ CỦA HÀM MẬT ĐỘ XÁC SUẤT .....</b>	<b>119</b>
6.1. Thuật toán hậu nghiệm cực đại (MAP) .....	119
6.2. Thuật toán hợp lý cực đại (ML).....	120
6.3. Thuật toán cực đại hóa kỳ vọng (EM).....	120
6.4. Áp dụng EM trong ước lượng tham số của dữ liệu tuân theo phân bố Gauss trong điều kiện dữ liệu bị cắt.....	122
Kết luận chương.....	126
Bài tập chương 6.....	126
<b>TÀI LIỆU THAM KHẢO.....</b>	<b>127</b>